

ÉTUDE APPROFONDIE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : partie 1.

— Piste rouge : parties 1 et 2.

— Piste noire : tout le devoir.

Cela dit, si vous faites la partie 3, merci de ne pas la rédiger sur votre copie !

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_0 \geq 0$, $u_1 \geq 0$ et $u_{n+2} = u_n u_{n+1} + \frac{2}{9}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De toute évidence, une telle suite est positive, et même strictement à partir du rang 2.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, l'unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ pour laquelle $u_0 = x$ et $u_1 = y$ est notée $(u_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$, mais on peut la noter $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand x et y sont fixés sans ambiguïté. Si $(u_n(x, y))_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est notée $\ell(x, y)$.

Enfin, pour tout $\alpha \in [0, +\infty]$, on pose $E_\alpha = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid u_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \right\}$.

1 TOUTE SUITE DE $\mathcal{S}$ POSSÈDE UNE LIMITE

- 1) Déterminer les suites constantes de $\mathcal{S}$ et étudier le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - x + \frac{2}{9}$.
- 2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. On suppose u_N et u_{N+1} supérieurs à $\frac{2}{3}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, strictement pour au moins l'un des deux. On pose $m_n = \min \{u_n, u_{n+1}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que $m_n > \frac{2}{3}$ pour tout $n \geq N + 2$ et que $(m_n)_{n \geq N}$ est croissante.
 - b) Montrer que $m_{n+2} \geq m_n^2 + \frac{2}{9}$ pour tout $n \geq N$ et en déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- 3) Pour quels éléments $\alpha \in [0, +\infty]$ l'ensemble E_α est-il non vide ?
- 4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. On suppose u_N et u_{N+1} inférieurs à $\frac{2}{3}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, strictement pour au moins l'un des deux. On pose $\delta_n = u_n - \frac{1}{3}$ et $M_n = \max \{|\delta_n|, |\delta_{n+1}|\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que $M_n < \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq N + 2$.
 - b) Montrer que $\delta_{n+2} = \delta_n \delta_{n+1} + \frac{\delta_n + \delta_{n+1}}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $(M_n)_{n \geq N}$ est décroissante.
D'après le théorème de la limite monotone, $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $M_\infty \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. On se donne $r \in \left]M_\infty, \frac{1}{3}\right[$.
 - c) Montrer que $M_{n+2} \leq \left(r + \frac{2}{3}\right) M_n$ à partir d'un certain rang et en déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$.
- 5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. On suppose que $u_0 \leq u_1$ et que les hypothèses des questions 2) et 4) sont fausses. Étudier la monotonie des suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, puis montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
On prouve de même que si $u_0 > u_1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

En résumé, toute suite de $\mathcal{S}$ possède une limite.

2 DESCRIPTION DES ENSEMBLES E_α

- 6) a) Comparer $\ell(x, y)$ et $\ell(x', y')$ pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}_+^2$ pour lesquels $x \leq x'$ et $y \leq y'$.
b) Montrer que $E_{\frac{1}{3}}$ contient $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ et que $E_{+\infty}$ contient $\mathbb{R}_+ \times [8, +\infty[$.
- 7) Soient $(x, y) \in E_{\frac{2}{3}}$ et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^2$ deux couples distincts pour lesquels $x \leq x'$ et $y \leq y'$.
 - a) Montrer que $u_n(x, y) < u_n(x', y')$ pour tout $n \geq 2$.
Comme $u_n(x, y) + u_{n+1}(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}$, on peut se donner un rang N à partir duquel $u_n(x, y) + u_{n+1}(x, y) \geq 1$.
 - b) En déduire l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ pour lequel $u_n(x', y') \geq u_n(x, y) + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
 - c) En déduire que $(x', y') \in E_{+\infty}$.

- 8) Soient $(x, y) \in E_{\frac{2}{3}}$ et $(x', y') \in \mathbb{R}_+^2$ deux couples distincts pour lesquels $x' \leq x$ et $y' \leq y$. Dédurre des résultats précédents que $(x', y') \in E_{\frac{1}{3}}$.
- 9) a) Montrer que la fonction $t \mapsto u_n(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$.
 Dans les questions b) et c), on utilisera librement la définition epsilonlesque suivante de la continuité au point $y \geq 0$, qui sera étudiée plus tard dans l'année : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \geq 0, |t - y| < \delta \implies |u_n(x, t) - u_n(x, y)| < \varepsilon$.
- b) Montrer que pour tout $(x, y) \in E_{+\infty}$, il existe un réel $\delta \in]0, y]$ pour lequel $\{x\} \times]y - \delta, y + \delta[\subset E_{+\infty}$.
- c) Montrer de même que pour tout $(x, y) \in E_{\frac{1}{3}}$, il existe un réel $\delta \in]0, y]$ pour lequel $\{x\} \times [y, y + \delta[\subset E_{\frac{1}{3}}$.
- 10) Soit $x \geq 0$.
 a) Montrer que l'ensemble $\{t \geq 0 \mid (x, t) \in E_{\frac{1}{3}}\}$ possède une borne supérieure.
 b) En déduire qu'il existe un et un seul réel $y \geq 0$ noté $\varphi(x)$ pour lequel $(x, y) \in E_{\frac{2}{3}}$.
- 11) a) Calculer $\varphi\left(\frac{2}{3}\right)$ et montrer que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
 b) Montrer que $\ell\left(y, xy + \frac{2}{9}\right) = \ell(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, puis que $\varphi(\varphi(x)) = x\varphi(x) + \frac{2}{9}$ pour tout $x \geq 0$.
 c) En déduire que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On peut presque montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$, mais il nous manque quelques outils théoriques pour le faire proprement.

3 COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DANS LE CAS DIVERGENT

- 12) On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $X^2 - X - 1$ possède deux racines réelles φ et ψ rangées dans l'ordre $\psi \leq \varphi$. Que valent φ , ψ , $\varphi + \psi$ et $\varphi\psi$? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.
- 13) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$. On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Quitte à décaler les termes, on peut supposer sans perte de généralité que $u_n \geq e^\varphi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut ainsi poser $a_n = \ln u_n$ et $\varepsilon_n = \ln\left(1 + \frac{2}{9u_n u_{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- a) Montrer que $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $a_n \geq \varphi^n$ et $u_n \geq \varphi^n$.
- b) En déduire que $\varepsilon_n \leq |\psi|^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que pour tout $n \geq 2$: $a_n = F_{n-1} a_0 + F_n a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} F_{n-k-1} \varepsilon_k$.
- d) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon_k}{\varphi^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On peut ainsi poser $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{a_0}{\varphi} + a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{\varphi^{k+1}}\right)$.
- e) Simplifier $a_n - \lambda \varphi^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce au résultat de la question 12), puis montrer que $a_n - \lambda \varphi^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- f) En déduire l'existence d'un réel $c > 1$ pour lequel $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c^{\varphi^n}$.
- Autant dire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge très fortement vers $+\infty$!